

卒業論文

衝撃波管問題の接触不連続面における
進化スムージング長を用いた SPH 法の改良

Improvement of SPH method by using Evolutionary Smoothing Length
on Contact discontinuity for Shocktube problem

2022.2.24

瀬野 泉美

Izumi SENO

061800946

名古屋大学 理学部物理学科 理論宇宙物理学研究室

指導教員：犬塚 修一郎 教授

*Laboratory for Theoretical Astrophysics
Undergraduate School of Department of Physics, Faculty of Science
Nagoya University
JAPAN*

Supervisor : Professor Shuichiro Inutsuka

seno.izumi@c.mbox.nagoya-u.ac.jp

Abstract

SPH(Smoothed Particle Hydrodynamics) 法は流体力学の数値計算法のうち粒子法と呼ばれる手法の一種である。粒子法はメッシュ法と異なり大変形問題や自由表面を扱うのに適しており、古くから宇宙物理学の分野で用いられてきた。

本研究では、SPH 法の密度表式内のスムージング長に着目し、最適なスムージング長を選択し衝撃波管問題の接触不連続面の数値計算精度の向上を目標とした。本論文では、従来の可変スムージング長を用いた衝撃波管問題の接触不連続面における数値計算結果の問題点を明示し、最適なスムージング長としてスムージング長の時間発展式（進化スムージング長）を導入、実験的に数値計算を行った結果を示す。

The SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) method is one of the numerical methods for fluid dynamics, which is called the particle method. Unlike the mesh method, the particle method is suitable for large deformation problems and free surface problems, and has been used in the field of astrophysics for a long time.

In this study, I focused on the smoothing length in the density table of the SPH method, and aimed to improve the numerical accuracy of the contact discontinuity surface of the shocktube problem by selecting the optimum smoothing length. In this paper, the problems of the numerical results on the contact discontinuity surface of the shocktube problem using the conventional variable smoothing length are clarified, and the time differentiation of the smoothing length (evolutionary smoothing length) is introduced as the optimum smoothing length.

目次

1	Introduction	3
2	SPH 法	3
2.1	標準 SPH 法 (SSPH)	3
2.2	人工粘性を考慮した SPH 法	5
2.3	可変スムージング長	6
2.4	進化スムージング長	6
3	衝撃波管問題	7
3.1	原理	7
3.2	解析解	10
4	時間発展法	11
4.1	RungeKutta 法	11
4.2	Symplectic 性を持つ数値計算法	12
5	数値計算結果	15
5.1	音波の伝播	15
5.2	衝撃波管問題	16
5.2.1	可変スムージング長	17
5.2.2	進化スムージング長	19
6	Summary	22
	付録 A CFL 条件	23
	付録 B 音波の計算の初期条件設定方法	23
	付録 C 衝撃波管問題解析解	25
	付録 D 進化スムージング長 導入の経緯	26

1 Introduction

星形成や惑星形成を理解する上で、非線形の物理現象を多く考慮しなければならない。非線形の現象を解析的に解くことは非常に困難であるため、数値計算が必要不可欠になる。天文学で用いられる流体数値計算の代表的な方法として、SPH 法、メッシュ法が上げられる。SPH 法は流体を粒子の集合体とみなして離散化し、その粒子の時間発展を追うラグランジュ的手法である。それに対し、メッシュ法は流体をメッシュで離散化し、時間と場所で流体を見るオイラー的手法である。この論文では、SPH 法に焦点を当てることにする。

2 SPH 法

Lagrange 的な記述をする粒子法的な流体計算法が有利な場合が多くある。ここで Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) 法と呼ばれる粒子を用いる流体計算法が数多く使われている。この方法は、自由表面などを扱うのに適しているため、現在では、ほぼ非圧縮である水を扱う海洋学や原子力工学などのエンジニアリングの分野でも SPH 法から発展した粒子法が盛んに行われている。

SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) 法のメリットは、流体をラグランジュ的に見るため、(1) 高密度領域で非常に高精度に記述できる、(2) 流体の変形の記述が簡単、(3) 3次元の記述が簡単、などがある。逆にデメリットとしては、(1) 計算に時間がかかる、(2) 低密度領域で低精度であるため、電磁場のような場の記述には適さない、などが上げられる。星形成や惑星形成では高密度領域の物理現象が重要になることが多く、さらに計算領域に真空の領域ができる場合が多いため、SPH 法は天文学の数値計算では非常に便利である。

2.1 標準 SPH 法 (SSPH)

SPH 法の中で一番簡単なものが標準 SPH 法である。しかし、標準 SPH 法には多くの問題点があり、例えば、(1) 人工粘性の強さの調節、(2) 粗い近似による空間精度の低下、などが挙げられる。(1) は衝撃波を記述するために導入されたものであるが、発生する衝撃波に合わせて α, β (2.2 参照) を調節しなければならない。発生する衝撃波の強さが分からないような問題を解きたい時には、これは大きな欠点となる。また、人工粘性は粒子同士が近づいた場所全てに効いてしまうため、本来ならば粘性が無い場所まで粘性が効いてしまうことも問題点の1つである。(2) は物理量の勾配を求める際に、 $W(x, h) \sim \delta(x)$ という粗い近似をするため、空間 0 次精度になってしまっている。この結果、物理量の勾配の変化が大きい場所では大きな誤差が生じることになる。

ラグランジュ的描像の流体力学の基礎方程式は

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \mathbf{g} \quad (2.1)$$

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{P}{\rho}\nabla \cdot \mathbf{v} \quad (2.2)$$

u は単位質量あたりの内部エネルギーである。この他に状態方程式が必要である。SPH 法では、固有の質量と広がりを持った SPH 粒子を考える。流体の密度の空間分布は、SPH 粒子を用いて

$$\rho(\mathbf{x}) = \sum_j m_j W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j, h) \quad (2.3)$$

で与えられるとする。 $W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j, h)$ は Kernel 関数と呼ばれ、個々の SPH 粒子の広がりを表すものであり、

球対称 $W(\mathbf{x}, h) = W(|\mathbf{x}|, h)$ かつ、空間積分に対して

$$\lim_{r \rightarrow \infty} W(r, h) = 0, \quad \int d\mathbf{x} W(\mathbf{x}, h) = 1 \quad (2.4)$$

のように規格化されている。 h はそのカーネル関数の広がりを表すパラメータであり、スムージング長と呼ばれる。系全体の質量は

$$M \equiv \int \rho d\mathbf{x} = \sum_j m_j$$

となり保存される。通常の SPH 法では流体の連続の式は自動的に満たされるため解く必要がない。

Kernel 関数 $W(\mathbf{x}, h)$ としては、Gauss 関数と Spline 関数がよく使われる。Gauss 関数は

$$W(\mathbf{x}, h) = \left[\frac{1}{h\sqrt{\pi}} \right]^d \exp\left(-\frac{\mathbf{x}^2}{h^2}\right) \quad (2.5)$$

で与えられ、本研究においては全てこの関数を用いるものとする。Gauss 関数は有限の距離では値がゼロにならないため、実際に使うには適当な半径以上では相互作用しない ((2.3) の和から除外する) ようにする必要がある。

密度勾配分布は式 (2.3) を微分した

$$\nabla \rho = \sum_j m_j \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j, h) \quad (2.6)$$

で与えられる。

■運動方程式

SPH では、物理量 $f(\mathbf{x})$ の本当の空間分布の代わりに、以下で定義されるような量み込みの分布 $\langle f \rangle(\mathbf{x})$ を考える。

$$\langle f \rangle(\mathbf{x}) = \int d\mathbf{x}' f(\mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h') \quad (2.7)$$

ここで、一般には、 h と h' は等しくなくても良い。 f の微分については、部分積分と式 (2.4) を使って

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} f \right\rangle(\mathbf{x}) = \int d\mathbf{x}' f(\mathbf{x}') \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h')$$

となるので、 $\langle \nabla f \rangle = \nabla \langle f \rangle$ である。ここで、以下の恒等式

$$1 = \sum_j m_j \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j, h) \quad (2.8)$$

を使うと、上式を

$$\langle \nabla f \rangle(\mathbf{x}) = \sum_j m_j \int d\mathbf{x}' \frac{f(\mathbf{x}')}{\rho(\mathbf{x}')} W(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_j, h) \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h') \quad (2.9)$$

のように変形できる。SPH の定式化では、 h が十分に小さいとみなして、 $W(\mathbf{x}, h) \rightarrow \delta(\mathbf{x})$ という置き換えを用い、さらに

$$\langle \nabla f \rangle(\mathbf{x}) = \sum_j m_j \frac{f(\mathbf{x}_j)}{\rho(\mathbf{x}_j)} \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j, h') \quad (2.10)$$

のように変形する。実際には、再度 $h' = h$ として、式 (2.3) により密度を計算するときの h と式 (2.10) の h' は同じ値を使う。以下では h' を単に h と書く。

運動方程式の圧力勾配項 $-\frac{1}{\rho}\nabla p$ を考える。圧力勾配 ∇p をそのまま式 (2.10) で評価しても良いが、その場合には圧力勾配による力に作用反作用の法則が成り立たなくなる、という問題がある。作用反作用の法則が成り立つようにするには

$$\frac{1}{\rho}\nabla p = \frac{p}{\rho^2}\nabla\rho + \nabla\left(\frac{p}{\rho}\right) \quad (2.11)$$

のように変形してから計算すれば良い。この式の右辺第 1 項に式 (2.6) を、第 2 項に式 (2.10) を用いると、流体の運動方程式 (2.1) から SPH 粒子 i の運動方程式

$$\frac{D\mathbf{v}_i}{Dt} = -\sum_j m_j \left[\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} \right] \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h) \quad (2.12)$$

が得られる。この式の右辺は i と j に対して反対称になっているため、SPH 粒子同士に働く力に対しても作用反作用の法則が成り立ち、全系の運動量と角運動量が保存することが保証される。

■エネルギー方程式

エネルギー方程式 (2.2) は、右辺を式 (2.10) を用いて近似した

$$\frac{Du_i}{Dt} = \sum_j m_j \frac{p_i}{\rho_i^2} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h) \quad (2.13)$$

が使われるほか、これを 2 つの粒子に対して対称な形にした

$$\frac{Du_i}{Dt} = \frac{1}{2} \sum_j m_j \left[\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} \right] (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h) \quad (2.14)$$

も用いられる。時間積分を行った時に、これらの表式は必ずしも内部エネルギー $u_i > 0$ を保証し得ない点は注意しなければならない。前者は強い衝撃波があっても u_i が負になりにくいと言う利点がある。

2.2 人工粘性を考慮した SPH 法

天体における流体力学現象は超音速流を伴っている。従って、天体物理学的流体力学現象を扱う数値計算手法は非常に強い衝撃波を取り扱うことが求められる。

物理的粘性項が小さい場合 (レイノルズ数 $Re \gg 1$) に、衝撃波を記述するのに必要な散逸を数値的に導入する簡単な方法が、人工粘性項の導入である。Navier-Stokes 方程式に現れる物理的な粘性項は速度の拡散であり、これは SPH では 2 つの粒子の相対速度に比例した抵抗で表現できる。通常はさらに速度の 2 乗に比例した抵抗を加える。人工粘性項 Π_{ij} を含んだ SPH 粒子 i の運動方程式 (2.12) とエネルギー方程式 (2.14) は

$$\frac{D\mathbf{v}_i}{Dt} = -\sum_j m_j \left[\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} + \Pi_{ij} \right] \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h) \quad (2.15)$$

$$\frac{Du_i}{Dt} = \frac{1}{2} \sum_j m_j \left[\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} + \Pi_{ij} \right] (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h) \quad (2.16)$$

で、人工粘性項は以下のように表される。

$$\Pi_{ij} = -\alpha \frac{Cs_{ij}\mu_{ij}}{\rho_{ij}} + \beta \frac{\mu_{ij}^2}{\rho_{ij}}, \quad \mu_{ij} = \frac{h(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)}{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)^2 + 0.01h^2} \quad (2.17)$$

ここで、 C_s は音速を表し、添字“ ij ”がついた量は i 粒子と j 粒子の値の適当な平均値を表す。また、膨張している時に人工粘性が効かないようにするために Π_{ij} は粒子同士が遠ざかっているときはゼロとする。

この方法は現在でも多くの人に使われているが、精度の良い結果を得るためには、発生する衝撃波の強さに合わせて α, β の値を調整する必要があり、また非常に強い衝撃波では流体粒子がお互いを突き抜けてしまうという問題が生じる。

2.3 可変スムージング長

スムージング長は、定数 h と固定して計算する方法と、変数 $h(\mathbf{x})$ として計算する方法がある。しかし、スムージング長は粒子間隔程度が望ましいため、定数として扱うことができない場合が多い。よって、一般的にはスムージング長は変数として扱うべきである。

一般的に、スムージング長可変時の具体的な求め方は以下の式を用いると良い、とされている。

$$h_i = \eta \left(\frac{m_i}{\rho_i^*} \right)^{\frac{1}{d}} \quad (2.18)$$

$$\rho_i^* = \sum_j m_j W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h_i^*) \quad (2.19)$$

$$h_i^* = C_{\text{smooth}} h_i \quad (2.20)$$

η は $\eta \sim 1$ 程度が良い。 C_{smooth} は $C_{\text{smooth}} > 1$ とすると、 ρ^* を ρ より滑らかにする効果があり、接触不連続面などの ρ の空間的变化が激しい時に有効である。強い接触不連続面を伴う場合、 $C_{\text{smooth}} \sim 2$ 程度が良いとされている。強い接触不連続面を伴わない場合は、 $C_{\text{smooth}} = 1$ 、つまり

$$h_i = \eta \left(\frac{m_i}{\rho_i} \right)^{\frac{1}{d}} \quad (2.21)$$

で良い。

ρ を求めるために h を使い、 h を求めるために ρ を使うので、一見イテレーションが必要に見えるが、 ρ を求める際に使う h は前の時間ステップの h で十分である。よって、 $t = 0$ の初期状態のみイテレーションすれば良い。

2.4 進化スムージング長

■可変スムージング長の利点・欠点

可変スムージング長を考慮した場合の密度の式は以下のようになる。

$$\rho_i = \sum_j m_j W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h_k) \quad , \quad (k = i, j) \quad (2.22)$$

ρ_i を求めるときに使うカーネル関数 W のスムージング長を SPH 粒子の添字 i にする手法を Gather 法、和をとる添字 j にする方法を Scatter 法と呼ぶ。5.2.1 で述べるお互いの利点・欠点のために、解析解に近づけるような「最適なスムージング長」が必要となる。

■進化スムージング長の導入

本研究において、前述の「最適なスムージング長」とは「時間発展するスムージング長」（以下、進化スムージング長と呼ぶ。）であることを期待して、スムージング長の時間微分式を式 (2.23) の形で導入した。

$$\frac{\Delta h_i}{\Delta t} = -h_i \sum_j \frac{m_j}{\rho_{k'}} (v_i - v_j) \frac{\partial}{\partial x_i} W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h_k) \quad (2.23)$$

ここで $k, k' = i$ or j とし、本研究では $\rho_{k'}, h_k$ を変更することによって実験的に数値計算を実行した。なお、式 (2.23) を導入した経緯については、付録 D に後述する。

また、進化スムージング長の導入によりカーネル関数内の h の添字の選択が式 (2.22) と式 (2.23) の 2 式で必要となる。式 (2.23) の $\Delta h_i / \Delta t$ についても同様に

$$\begin{cases} \frac{\Delta h_i}{\Delta t} = -h_i \sum_j \frac{m_j}{\rho_{k'}} (v_i - v_j) \frac{\partial}{\partial x_i} W(x_i - x_j, h_i) & : \text{Gather 法} \\ \frac{\Delta h_i}{\Delta t} = -h_i \sum_j \frac{m_j}{\rho_{k'}} (v_i - v_j) \frac{\partial}{\partial x_i} W(x_i - x_j, h_j) & : \text{Scatter 法} \end{cases}$$

という呼び方を採用するとして、以下、例えば

$$\begin{cases} \rho(x_i) = \sum_j m_j W(x_i - x_j, h_i) & : \text{Gather 法} \\ \frac{\Delta h_i}{\Delta t} = -h_i \sum_j \frac{m_j}{\rho_{k'}} (v_i - v_j) \frac{\partial}{\partial x_i} W(x_i - x_j, h_j) & : \text{Scatter 法} \end{cases}$$

を用いた場合、「Gather-Scatter」と呼ぶこととする。ここで、式 (2.23) 右辺の $\rho_{k'}$ は呼称には関係がないことに注意が必要である。

可変スムージング長では更新後の位置と前ステップのスムージング長を用いて、毎回密度とスムージング長をイテレーションして数値計算を実行している。対して、進化スムージング長を導入したことによって、更新した位置と更新したスムージング長で定義する変数を全て更新した状態で、イテレーションなしで密度を更新することができるようになる。従って、本研究ではスムージング長を更新後、密度を更新するものとする。

3 衝撃波管問題

3.1 原理

異なる圧力と密度を持った 2 種類の気体を初期に分割するような無限に長い管を考える。初期状態は

$$\begin{aligned} v = v_L, \quad p = p_L, \quad \rho = \rho_L, \quad x < x_0 \quad t = 0 \\ v = v_R, \quad p = p_R, \quad \rho = \rho_R, \quad x > x_0 \quad t = 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

ただし、 $p_L > p_R$ 、2 つの気体の接触面は $x = x_0$ とする。

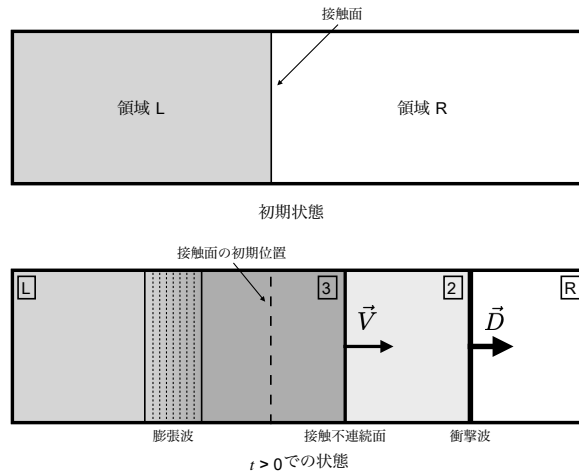


図 1: 衝撃波管内の流れの概念図

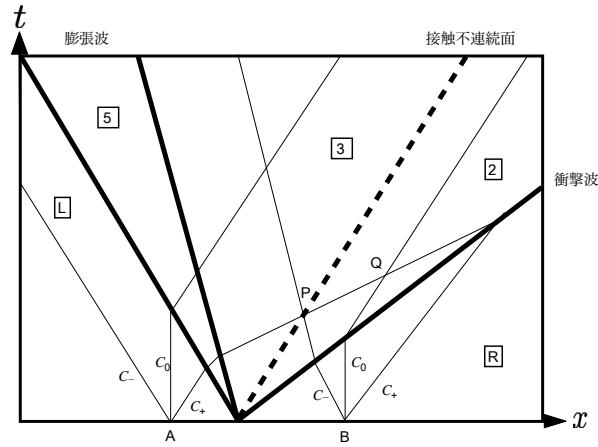


図 2: 2 状態の流体間の領域に生成される特性曲線と不連続面 – Riemann 問題

■衝撃波

1次元流体の基礎方程式をラグランジュ形式で書くと

$$\frac{dV}{dt} - \frac{\partial v}{\partial \xi} = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\partial p}{\partial \xi} = 0 \quad (3.3)$$

$$\frac{dE}{dt} + \frac{\partial(vp)}{\partial \xi} = 0 \quad (3.4)$$

ここで V は比体積, ξ は質量座標, E は単位堆積あたりの全エネルギーでこれらは式 (3.5) に示す関係を持つ。

$$\begin{cases} V = \frac{1}{\rho} \\ \rho dx = d\xi \\ E = u + \frac{1}{2}v^2 \end{cases} \quad (3.5)$$

上の式は保存形式

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

で書かれてる。衝撃波の位置を ξ_s としして速度 $W \equiv d\xi_s/dt$ で動くものとするとき, この式を $\xi_s - \epsilon$ から $\xi_s + \epsilon$ まで ($\epsilon > 0$) 積分すると,

$$\frac{d}{dt} \int_{\xi_s - \epsilon}^{\xi_s + \epsilon} U d\xi + F(\xi_{s,R}) - F(\xi_{s,L}) = 0 \quad (3.6)$$

となる。ただし, $\xi_{s,L} = \xi_s - \epsilon$, $\xi_{s,R} = \xi_s + \epsilon$ である。左辺第 1 項を変形し, $U_p/d\xi = U$ のように U_p を定義すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\xi_s - \epsilon}^{\xi_s + \epsilon} U d\xi &= \frac{d}{dt} [U_p(\xi_s + \epsilon) - U_p(\xi_s - \epsilon)] \\ &= \frac{d(\xi_s + \epsilon)}{dt} \frac{dU_p(\xi_s + \epsilon)}{d(\xi_s + \epsilon)} - \frac{d(\xi_s - \epsilon)}{dt} \frac{dU_p(\xi_s - \epsilon)}{d(\xi_s - \epsilon)} \\ &= [U(\xi_{s,R}) - U(\xi_{s,L})]W \end{aligned} \quad (3.7)$$

となる。このことから、衝撃波後面の量を * 付きで表すと、以下 3 式が成り立つ。

$$\pm W(V^* - V) + (v^* - v) = 0 \quad (3.8a)$$

$$\pm W(v^* - v) + (p^* - p) = 0 \quad (3.8b)$$

$$\pm W(E^* - E) + (v^*p^* - vp) = 0 \quad (3.8c)$$

ただし、符号は衝撃波の進行方向を表す。断熱理想気体の状態方程式 $p = (\gamma - 1)\rho u$ とエネルギーの定義、さらに上 3 式を用いて衝撃波後面の量のうち p^* 以外を消去し、それを用いて W を表すと

$$W = \sqrt{\gamma p \rho} \sqrt{1 + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \frac{p^* - p}{p}} \quad (3.9)$$

この W と式 (3.8b) を用いると、衝撃波前後の圧力と速度を関係付けられる。

■接触不連続面

接触面は密度の不連続を支えているが、一般的に圧力と速度は連続的である。従って、接触不連続面は v_2 と等しい速度 V で伝わる。この表面に沿って、以下の状態は満たされなければならない。

$$p_3 = p_2 \quad (3.10)$$

$$v_3 = v_2 \equiv V \quad (3.11)$$

■膨張波

膨張波は物理量の不連続はなく連続的に変化する。従って、断熱的であり波の前後でエントロピーは保存するため、

$$p^* V^{*\gamma} = p V^\gamma \quad (3.12)$$

が成り立つ。また、静止状態になる波ではリーマン不変量 J_\pm が波を跨いで一定となる。

$$J_\pm = v \pm \frac{2}{\gamma - 1} C_s \quad (3.13)$$

ただし、 J_+ は x 軸負の方向に進む波において、 J_- は x 方向正の方向に進む波において波を跨いで一定となる。また $C_s = \sqrt{\gamma p / \rho}$ である。

このことから波の前後の物理量の間

$$(v^* - v) \mp \frac{2}{\gamma - 1} (C_s^* - C_s) = 0 \quad (3.14)$$

の関係がある。以上から

$$W = \left| \frac{p^* - p}{v^* - v} \right| = \sqrt{\gamma p \rho} \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \frac{1 - p^*/p}{1 - (p^*/p)^{(\gamma-1)/2\gamma}} \quad (3.15)$$

W をこのように定義すると、膨張波においても

$$\pm W(v^* - v) - (p^* - p) = 0 \quad (3.16)$$

という式が成り立つ。

■膨張波を通った変数 - 領域 5

最後に、領域 3 と領域 L を分ける領域 5 を通る流れの変数の連続的な進化が決められるべきである。領域 5 でのガスの状態は式 (3.12) と式 (3.13) によって決められ、これは特性曲線 C_0, C_+ によって運ばれる情報の不連続を表している。従って、

$$\frac{p_5}{\rho_5^\gamma} = \frac{p_L}{\rho_L^\gamma} \quad (3.17)$$

そして

$$\frac{\gamma-1}{2}v_5 + C_{s_5} = \frac{\gamma-1}{2}v_L + C_{s_L} \quad (3.18)$$

となる。加えて、膨張波は特性曲線 C_- によって形成される。これは

$$\frac{\gamma-1}{2}v_5 - C_{s_5} = \text{constant} \quad \text{along} \quad \frac{dx}{dt} = v_5 - C_{s_5} \quad (3.19)$$

ということである。膨張波のそれぞれの特性曲線は、式 (3.18) を用いて

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\gamma+1}{2}v_5 - C_{s_L} - \frac{\gamma-1}{2}v_L \quad (3.20)$$

によって決められる。 v_5 は 0 から V の間で変化するので、初期の接触面の位置を $x = 0$ とおくと（一般的な場合 x を $x - x_0$ と置き換えれば良い）、膨張波内で

$$\begin{aligned} v_5 &= \frac{2}{\gamma+1} \left(\frac{x}{t} + C_{s_L} + \frac{\gamma-1}{2}v_L \right) \\ \left(-\frac{\gamma-1}{2}v_L - C_{s_L} < \frac{x}{t} < \frac{\gamma+1}{2}V - C_{s_L} - \frac{\gamma-1}{2}v_L \right) \\ C_{s_5} &= C_{s_L} - \frac{\gamma-1}{2}(v_5 - v_L) = v_5 - \frac{x}{t} \\ p_5 &= p_L \left(\frac{v_5}{C_{s_L}} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \end{aligned} \quad (3.21)$$

となる。

3.2 解析解

本研究では一貫して断熱理想気体を扱ったため、断熱の場合の解析解を導出する。

初期の不連続の左の物理量を添字 L 、右の物理量を添字 R で、接触不連続面の左右の圧力と速度を * 付きで表す。式 (??) と式 (??) より左に伝播する波と右に伝播する波（衝撃波または膨張波）について以下のようになることが分かる。

$$-W_L(v^* - v_L) - (p^* - p_L) = 0 \quad (3.22)$$

$$W_R(v^* - v_R) - (p^* - p_R) = 0 \quad (3.23)$$

ここで、衝撃波の速度 W_i は p^* と p_i ($i = L, R$) との大小関係によって、以下のように決まる。

$p_L > p_R$ のとき

$$\begin{cases} W_L = \sqrt{\gamma p_L \rho_L} \sqrt{1 + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \frac{p^* - p_L}{p_L}} & (\text{衝撃波}) \\ W_R = \sqrt{\gamma p_R \rho_R} \frac{\gamma-1}{2\gamma} \frac{1 - p^*/p_R}{1 - (p^*/p_R)^{(\gamma-1)/2\gamma}} & (\text{膨張波}) \end{cases} \quad (3.24)$$

$p_L < p_R$ のとき

$$\begin{cases} W_L = \sqrt{\gamma \rho_L p_L} \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \frac{1 - p^*/p_L}{1 - (p^*/p_L)^{(\gamma-1)/2\gamma}} & (\text{膨張波}) \\ W_R = \sqrt{\gamma p_R \rho_R} \sqrt{1 + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \frac{p^* - p_R}{p_R}} & (\text{衝撃波}) \end{cases} \quad (3.25)$$

また、式 (3.22), 式 (3.23) より, p^*, v^* は W_L, W_R を用いて以下のようにかける。

$$p^* = \frac{p_L/W_L + p_R/W_R + v_L - v_R}{1/W_L + 1/W_R} \quad (3.26)$$

$$v^* = \frac{v_L W_L + v_R W_R + p_L - p_R}{W_L + W_R} \quad (3.27)$$

ここで, p^* と v^* を求めるためには W_L, W_R が必要だが, W_L, W_R を求めるためには p^* が必要である。従って, p^* を求める際には適当な $p^* = \frac{p_L + p_R}{2}$ からイテレーションして, p^*, W_L, W_R を求める。 v^* は求めた W_L, W_R から求めれば良い。これで接触不連続面前後の圧力と速度の値を決めることができる。具体的な解析解の表式は付録 C にて後述する。

4 時間発展法

4.1 RungeKutta 法

以下のような計算法を考える。

$$\begin{aligned} k_1 &= y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i) \\ y_{i+1} &= y_i + h f\left(x_i + \frac{h}{2}, k_1\right) \end{aligned} \quad (4.1)$$

これは 2 次精度の公式になっている。つまり, 局所誤差は $O(h^3)$ である。この計算法については, 図を使った説明ができる。元の点からまずオイラー法と同様に接線を引くが, これを次の x_{i+1} まで伸ばすのではなく, ステップの半分のところで止める。ここでもう 1 階微分方程式の右辺を評価する。ここでの導関数の値を使って, 元のところ (x_i, y_i) から直線を引く。

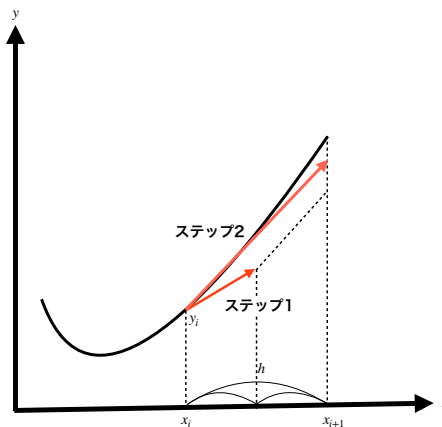


図 3: 2 次の RungeKutta 法の概念図

2次精度を実現するルンゲークッタ型の公式というのはこれ1つではない。以下のようなものも可能である。

$$k_1 = hf(x_i, y_i) \quad (4.2)$$

$$k_2 = hf(x_{i+1}, y_i + k_1) \quad (4.3)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{k_1 + k_2}{2} \quad (4.4)$$

さらに、これらの公式を含む一般的な公式を与えることもできる。

一般的にルンゲークッタ法は

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^s b_i k_i \quad (4.5)$$

$$k_i = f \left(x_n + c_i h, y_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j \right) \quad (4.6)$$

という形に書くことができる。自然数 s を段数といい、 a_{ij}, b_i, c_i は公式の係数である。段数とこれらの係数を決めることで様々な積分公式を構成することができる。

4.2 Symplectic 性を持つ数値計算法

Symplectic 法は Hamilton 系のための時間積分の一種。ここでは簡単のために調和振動子の数値計算を例にとる。質量とばね定数が 1 の単位系で調和振動子の基礎方程式は以下のように書ける。

$$\frac{dq}{dt} = p \quad (4.7)$$

$$\frac{dp}{dt} = -q \quad (4.8)$$

ここで q, p は正準変数で位置と運動量を表す。

Symplectic 法の中で最も簡単な方法は以下に示す Leapfrog 法である。

$$p(t + \Delta t/2) = p(t) - q(t) \frac{\Delta t}{2} \quad (4.9)$$

$$q(t + \Delta t) = q(t) + p(t + \Delta t/2) \Delta t \quad (4.10)$$

$$p(t + \Delta t) = p(t + \Delta t/2) - q(t + \Delta t) \frac{\Delta t}{2} \quad (4.11)$$

ここで Δt は時間刻み幅である。この式を変形すると、

$$q(t + \Delta t) = q(t) + p(t) \Delta t - q(t) \frac{(\Delta t)^2}{2} \quad (4.12)$$

$$= q(t) + \left(\frac{dq}{dt} \right)_t \Delta t + \left(\frac{d^2 q}{dt^2} \right)_t \frac{(\Delta t)^2}{2} \quad (4.13)$$

$$p(t + \Delta t) = p(t) - q(t) \Delta t - p(t) \frac{(\Delta t)^2}{2} + O(\Delta t^3) \quad (4.14)$$

$$= p(t) + \left(\frac{dp}{dt} \right)_t \Delta t + \left(\frac{d^2 p}{dt^2} \right)_t \frac{(\Delta t)^2}{2} + O(\Delta t^3) \quad (4.15)$$

となり、この時間積分法は 2 次精度であることがわかる。図 4 は初期値を $q(0) = 1, p(0) = 0$ 、時間刻み幅を 0.25 として (q, p) の時間進化を数値計算した時に得られるエネルギーの時間変化を表している。図に示されているようにエネルギーの誤差は一定の振動数・振幅で振動する。これは Symplectic 法に共通する特徴である。

図 5 は 2 次の Runge-Kutta 法で解いた結果と比較した結果を示している。2 次の Runge-Kutta 法ではエネルギー誤差が単調増加してしまう。そのほかの Euler 法や 4 次の Runge-Kutta 法など、その他の時間積分法においてもエネルギー誤差が単調増加・減少することが知られている。

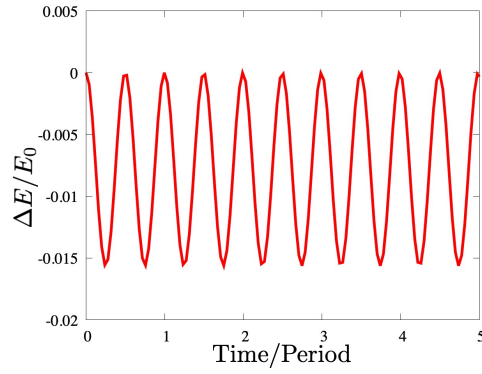


図 4: Leapfrog 法を用いて調和振動子のエネルギー誤差の時間発展を解いた結果。縦軸は厳密解 $E_0 = 0.5$ で規格化したエネルギーの厳密解からの相対誤差、横軸は周期 2π で規格化した時間を表す。

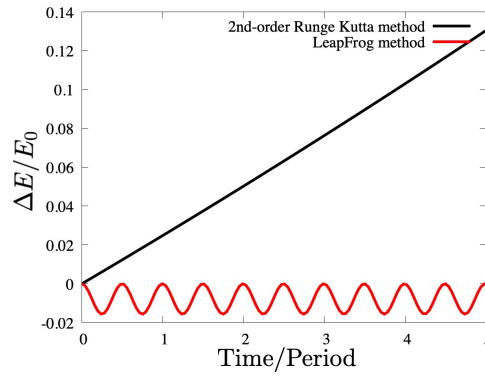


図 5: 2 次の Runge-Kutta 法と Leapfrog 法で調和振動子のエネルギーの時間変化を解いた結果。縦軸は厳密解 $E_0 = 0.5$ で規格化したエネルギーの厳密解からの相対誤差、横軸は周期 2π で規格化した時間を表す。黒線が 2 次の Runge-Kutta 法で解いた結果、赤線が Leapfrog 法で解いた結果である。2 次の Runge-Kutta 法ではエネルギー誤差が単調増加することがわかる。

Symplectic 法には影の Hamiltonian と呼ばれる保存量が存在する。Leapfrog 法を行列を用いて書き下すと以下ようになる。

$$\begin{pmatrix} q(t + \Delta t) \\ p(t + \Delta t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \Delta t^2 & \Delta t \\ -\Delta t + \Delta t^3/4 & 1 - \Delta t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

この行列の行列式は 1 となる。つまり面積保存写像になっている。一般に変換 $(q_0, p_0) \rightarrow (q, p)$ の Jacobi 行列

$$\mathbf{M} = \frac{\partial(q, p)}{\partial(q_0, p_0)} \quad (4.17)$$

の Jacobian が 1 となる時、これを面積保存写像と呼ぶ。(4.16) の行列の固有値は以下ようになる。

$$\lambda_{\pm} = 1 - \frac{\Delta t^2}{2} \pm \sqrt{\left(1 - \frac{\Delta t^2}{2}\right)^2 - 1} \quad (4.18)$$

ここで、

$$\lambda_- = \frac{1}{\lambda_+} \quad (4.19)$$

である。これを用いて (4.16) を対角化して書き直すと

$$\begin{pmatrix} \xi_+(t + \Delta t) \\ \xi_-(t + \Delta t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 1/\lambda_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_+(t) \\ \xi_-(t) \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

$$\xi_{\pm}(t) \equiv \frac{q(t)}{2} \pm \frac{p(t)}{\sqrt{\Delta t^2 - 4}} \quad (4.21)$$

となる。ここから、Leapfrog 法では $\xi_+\xi_-$ が保存量になっており、 Δt が一定の時はその量も保存量となる。

$$H_{\text{shadow}} \equiv -\frac{\xi_+(t)\xi_-(t)}{2}(\Delta t^2 - 4) = H - \frac{\Delta t^2}{8}q(t)^2 \quad (4.22)$$

$$H = \frac{p(t)^2 + q(t)^2}{2} \quad (4.23)$$

ここで H は調和振動子の Hamiltonian である。 Δt が一定の時、Hamiltonian は $H_{\text{shadow}} + \Delta t^2/16$ の周りを一定の振幅で振動することが分かる。 H_{shadow} は影の Hamiltonian と呼ばれている。Symplectic 法はこの影の Hamiltonian が保存量となる写像になっている。実際に上記の調和振動子の計算で影の Hamiltonian の時間変化を示したのが図 6 である。影の Hamiltonian は確かに保存している。

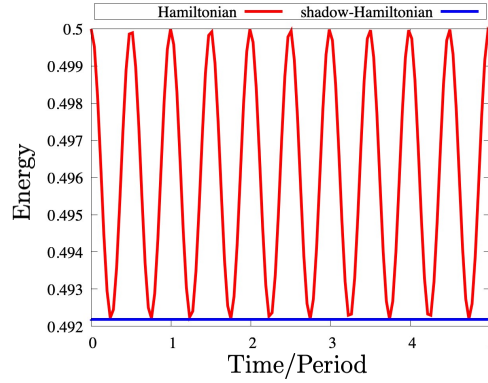


図 6: 調和振動子の Hamiltonian と影の Hamiltonian の時間変化。縦軸は角振動数 1 の単位系におけるエネルギー、横軸は周期 2π で規格化した時間を表す。赤線が Hamiltonian、青線が影の Hamiltonian の時間変化を表す。影の Hamiltonian が厳密に保存していることが分かる。

上記のように Symplectic 法を用いることでエネルギーの誤差を一定に抑えたまま長時間計算をすることが可能である。ここでは Leapfrog 法のみについてまとめたが、これを組み合わせることで 4 次の Symplectic 法も作ることができる。ただし、Symplectic 数値計算法も万能というわけではなく、時間刻みを変えて計算をする場合は精度が落ちてしまう。これは、Symplectic 法での保存量である影のハミルトニアンに時間刻み Δt を含むため、時間刻みを変えると影の Hamiltonian の値も変わってしまうからである。本研究では一貫して Leapfrog 法を用いる。

5 数値計算結果

5.1 音波の伝播

■原理

非摂動項を添字 0, 摂動項を添字 1 で

$$v = v_1 \quad (5.1)$$

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 \quad (5.2)$$

$$p = p_0 + p_1 \quad (5.3)$$

とすると連続の式, 運動方程式は線形近似で

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0 \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial x} \quad (5.5)$$

となる。(5.5) 式はポリトロピックな場合,

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{C_s^2}{\rho_0} \frac{\partial \rho_1}{\partial x} \quad (5.6)$$

となる。ここで, C_s は音速であり

$$C_s = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}}$$

と定義する。以上 2 式から ρ_1, v_1 のどちらかを消去すると

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} - C_s^2 \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial x^2} = 0 \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} - C_s^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} = 0 \quad (5.8)$$

となり, 波動方程式が導出される。この波動方程式は同じ形なので ρ_1, v_1 は同じ振る舞いをする事がわかる。

■計算結果

テスト計算としてまずは音波の計算をした。1次元で標準 SPH 法で, 断熱を仮定して行った。標準 SPH の人工粘性は 0, つまり $\alpha = \beta = 0$ とした。断熱の場合, $\gamma = 1.4$ とした。初期条件は以下の通りである。

$$\begin{cases} v_i = 0.01 C_s \sin(2\pi x) \\ \rho_i = 1.0 + 0.01 \sin(2\pi x) \\ p_i = 1.0 + 0.01 C_s^2 \sin(2\pi x) \end{cases} \quad (5.9)$$

とした。なお, 初期条件の設定方法は付録 B に示す。音速 C_s は断熱の場合

$$C_s = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}$$

となるように設定した。粒子数は 200 で, 計算範囲は $0 < x < 1.0$ で周期境界条件を用いた。 $t = 0$ から始め, $t = 6.28$ までを計算した。また, 速度についても式 (5.7) と式 (5.8) が同形であることから, 密度と同じ振る舞いをする事を確認した。計算結果は以下の通りである。

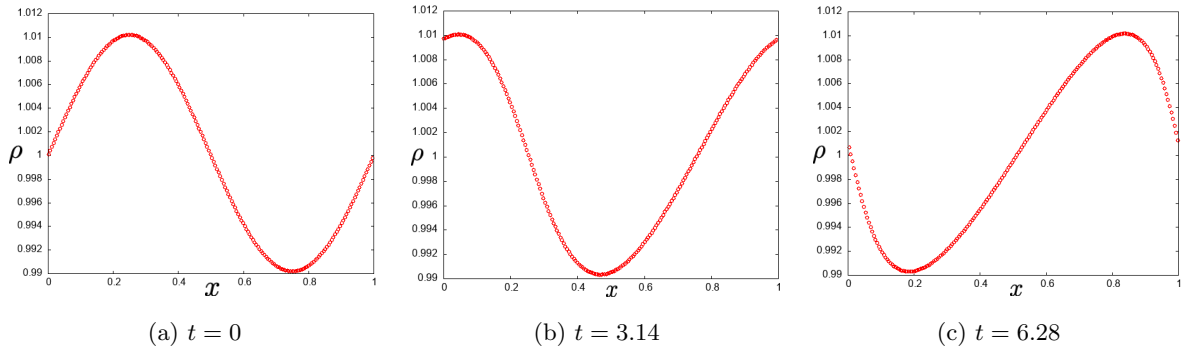


図 7: 初期条件 (5.9) に対する音波の伝播の数値計算結果。(a) : $t = 0$, (b) : $t = 3.14$, (c) : $t = 6.28$ での密度の様子を表している。横軸は粒子の位置座標, 縦軸は密度を表している。

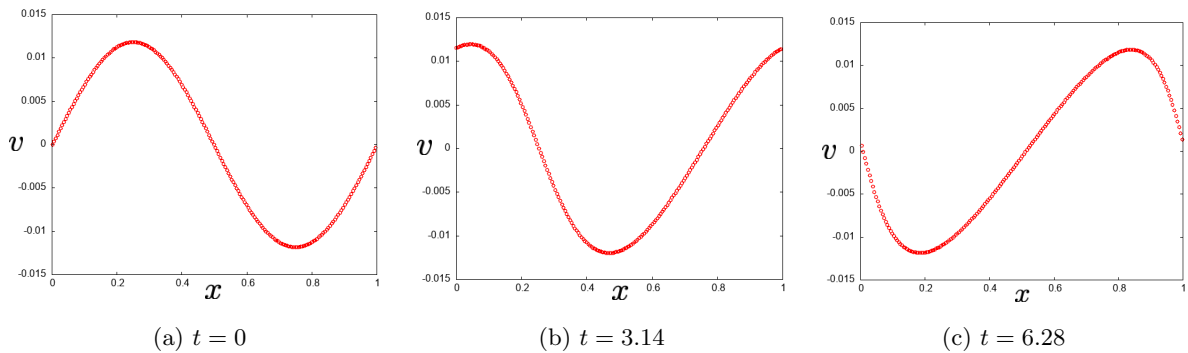


図 8: 初期条件 (5.9) に対する音波の伝播の数値計算結果。(a) : $t = 0$, (b) : $t = 3.14$, (c) : $t = 6.28$ での密度の様子を表している。横軸は粒子の位置座標, 縦軸は速度を表している。

図 7, 図 8 の比較から, 密度と速度の場合で正しく計算でき, 同じ振る舞いをしていることが確認できた。波形が少し右にずれているのは非線形の効果である。この波形の崩れより, いずれ波の切り立ちが起こり衝撃波になる。

5.2 衝撃波管問題

初期条件

$$\begin{aligned}
 \rho_L &= 1.0 & \rho_R &= 0.125 \\
 v_L &= 0.0 & v_R &= 0.0 \\
 p_L &= 1.0 & p_R &= 0.1 \\
 h_L &= 5.0 \times 10^{-4} & h_R &= 4.0 \times 10^{-2}
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

として数値計算を実行した。断熱理想気体を仮定し, 比熱比は $\gamma = 1.4$, 初期の接触面の位置を $x_0 = 0$, 粒子数は同質量の粒子を左に 1000 個, 右に 125 個に設定している。境界条件は

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad v = 0 \tag{5.11}$$

となるように設定し, 衝撃波および膨張波が境界に到達しない範囲 ($t = 0.115$) まで計算を実行した。また人工粘性の α, β の値はそれぞれ $\alpha = 1.5, \beta = 3.0$ として計算した。本研究において, 密度に関しては一貫して Scatter 法を用いることとした。これは, Gather 法を用いると式として議論した際に, スムージング長が式

(2.23) を満たす且つ場の量となってしまうことによる、議論の複雑化を防ぐため、言い換えると議論の簡単化を狙ったことに由来する。

5.2.1 可変スムージング長

■ Gather 法

可変スムージング長の Gather 法

$$\rho_i = \sum_j m_j W(x_i - x_j, h_i) \quad (5.12)$$

を用いた標準 SPH 法で数値計算した結果を図 9 に示す。

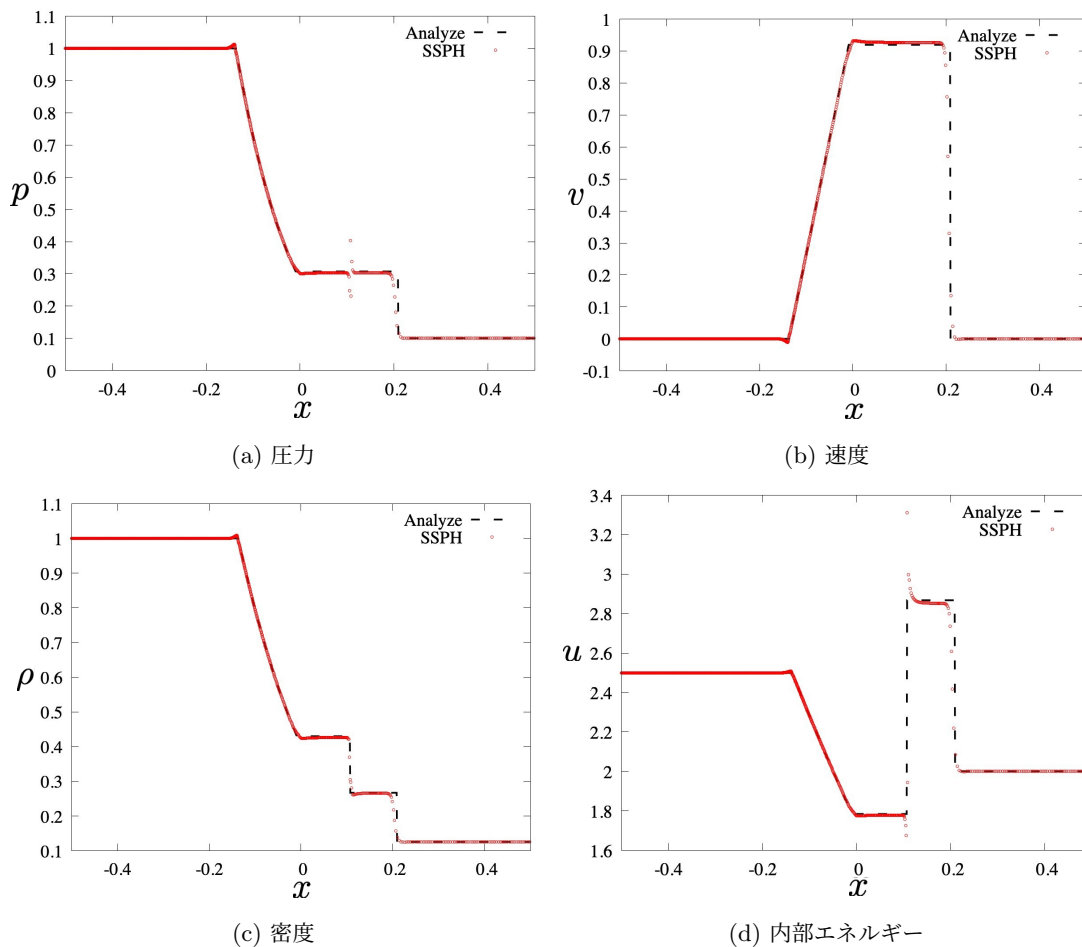


図 9: 初期条件 (5.10) に対する 1 次元衝撃波管問題の $t = 0.115$ における数値計算結果。横軸はすべて位置を、縦軸は (a) 圧力, (b) 速度, (c) 密度, (d) 内部エネルギーを表している。黒点線が解析解に基づいた結果 (Analyze), 赤点が Gather 法を用いた標準 SPH 法による数値計算結果 (SSPH) である。

どの図も数値計算結果と解析解が非常に良く一致している。ただ解析解のグラフの形が変化する場所においては多少の誤差が生じている。特に圧力と内部エネルギーの接触不連続面においては物理量が明らかに不自然な振る舞いをしている。これは標準 SPH 法の欠点であり、接触不連続面で圧力が連続となっているときに、運動方程式 (2.12) の右辺がゼロとならないことが原因である。

■ Scatter 法

可変スムージング長の Scatter 法

$$\rho_i = \sum_j m_j W(x_i - x_j, h_j) \quad (5.13)$$

を用いた標準 SPH 法で数値計算を実行した結果を図 10 に示す。

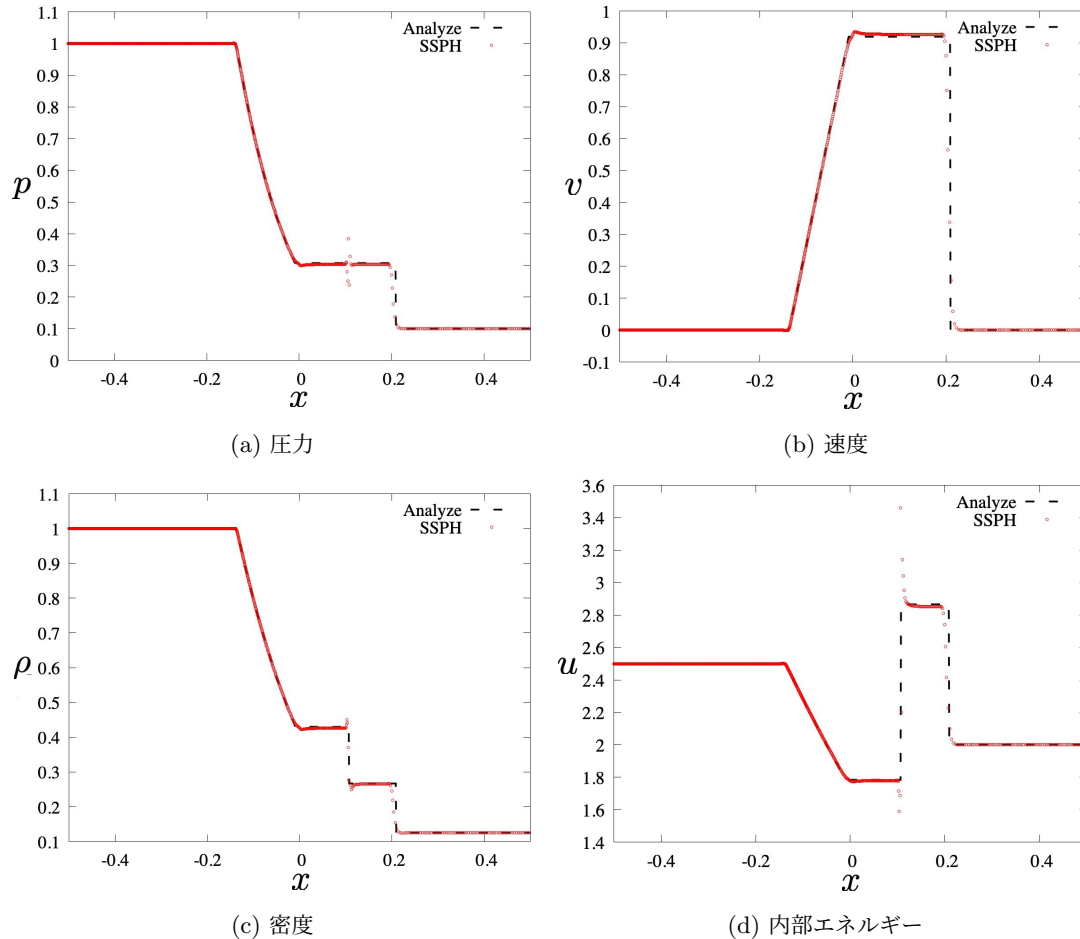


図 10: 初期条件 (5.10) に対する 1 次元衝撃波管問題の $t = 0.115$ における数値計算結果。横軸はすべて位置を、縦軸は (a) 圧力, (b) 速度, (c) 密度, (d) 内部エネルギーを表している。黒点線が解析解に基づいた結果 (Analyze), 赤点が Scatter 法を用いた標準 SPH 法による数値計算結果 (SSPH) である。

どの図も数値計算結果と解析解が非常に良く一致している。ただ解析解のグラフの形が変化する場所においては多少の誤差が生じている。特に圧力と内部エネルギーの接触不連続面においては物理量が明らかに不自然な振る舞いをしている。これは標準 SPH 法の欠点であり、接触不連続面で圧力が連続となっているときに、運動方程式 (2.12) の右辺がゼロとならないことが原因である。

■ Gather 法と Scatter 法の密度比較

図 9, 図 10 の密度のグラフについて接触不連続面付近を拡大した数値計算結果を図 14 に示す。

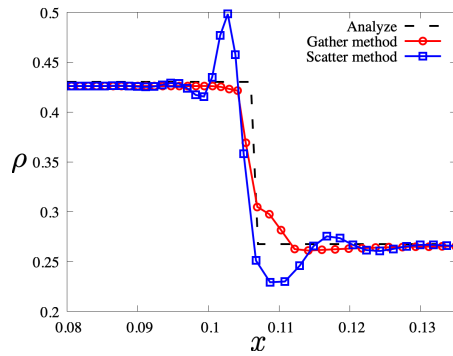


図 11: 可変スムージング長を用いて、衝撃波管問題を解いた数値計算結果のうち接触不連続面付近の拡大図。横軸は位置を、縦軸は密度を表している。また、黒点線は解析解 (Analyze)、赤点は Gather 法を用いた結果 (Gather method)、青点は Scatter 法を用いた結果 (Scatter method) である。

Gather 法は、接触不連続面付近の値が安定であることが利点として挙げられるが、Step 関数であるべき接触不連続面で広がりを持つことが欠点となっている。対して、Scatter 法では Gather 法と比較して、接触不連続面付近の値が不安定、という欠点を持つが、接触不連続面での傾きがシャープであるという利点がある。

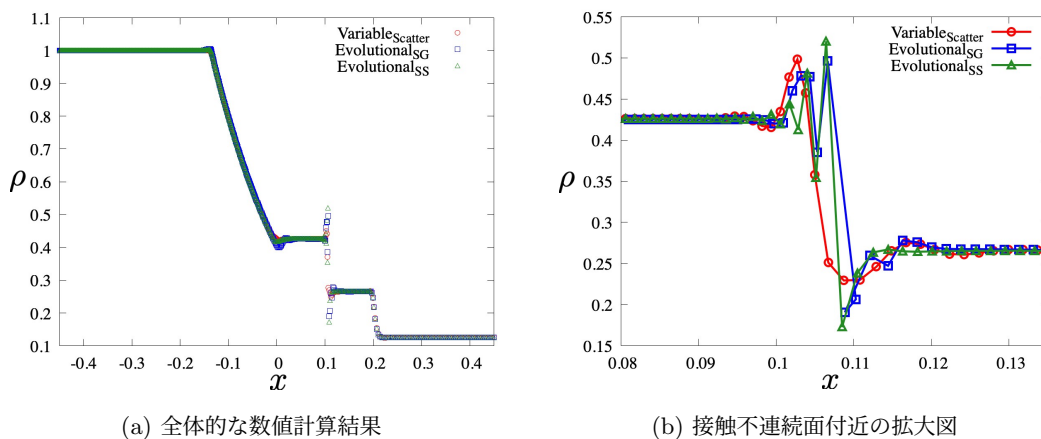
5.2.2 進化スムージング長

■ $\rho_{k'} = \rho_i$ の場合

式 (2.23) の $k' = i$ とした場合、すなわち

$$\frac{\Delta h_i}{\Delta t} = -h_i \sum_j \frac{m_j}{\rho_i} (v_i - v_j) \frac{\partial}{\partial x_i} W(x_i - x_j, h_k) \quad (5.14)$$

としてスムージング長の時間発展式を導入した場合の数値計算結果を図 12 に示す。



(a) 全体的な数値計算結果

(b) 接触不連続面付近の拡大図

図 12: 初期条件 (5.10) に対する 1 次元衝撃波管問題の $t = 0.115$ における数値計算結果。横軸はすべて位置を、縦軸は密度を表している。赤点が可変スムージング長 Scatter 法を用いた数値計算結果 (VariableScatter), 青点が進化スムージング長 Scatter-Gather を用いた数値計算結果 (Evolutional_{SG}), 緑点が進化スムージング長 Scatter-Scatter を用いた数値計算結果 (Evolutional_{SS}) である。

進化スムージング長を用いた場合も可変スムージング長と同様に数値計算を実行することができた。

可変スムージング長と比較して、接触不連続面右側の安定範囲が Scatter-Gather では変化はなく、Scatter-Scatter では大きくなり向上が見られた。さらに不連続面での傾きがよりシャープになる、という向上も見られた。しかし、不連続面付近ではスパイクの大きさがより大きくなってしまい、悪化が確認された。

■ $\rho_{k'} = \rho_j$ の場合

式 (2.23) の $k' = j$ とした場合、すなわち

$$\frac{\Delta h_i}{\Delta t} = -h_i \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} (v_i - v_j) \frac{\partial}{\partial x_i} W(x_i - x_j, h_k) \quad (5.15)$$

としてスムージング長の時間発展式を導入した場合の数値計算結果を図 13 に示す。

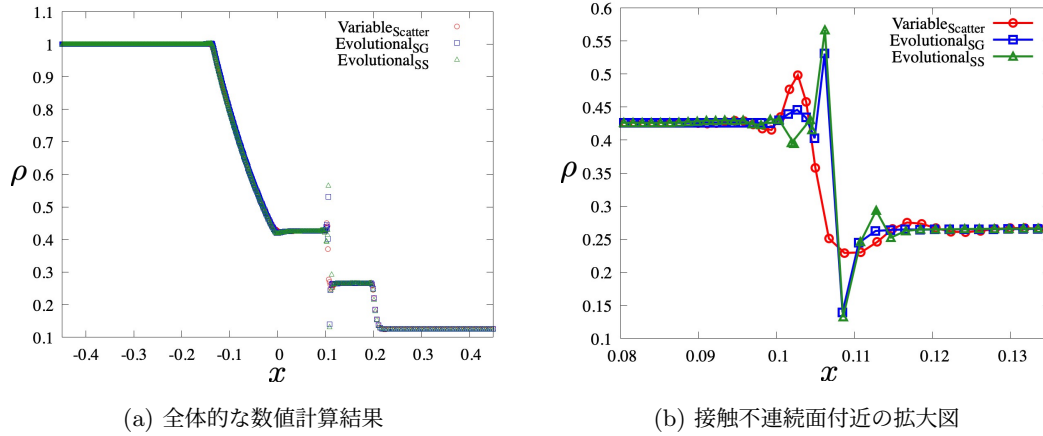


図 13: 初期条件 (5.10) に対する 1 次元衝撃波管問題の $t = 0.115$ における数値計算結果。横軸はすべて位置を、縦軸は密度を表している。赤点が可変スムージング長 Scatter 法を用いた数値計算結果 (VariableScatter), 青点が進化スムージング長 Scatter-Gather を用いた数値計算結果 (EvolutionalSG), 緑点が進化スムージング長 Scatter-Scatter を用いた数値計算結果 (EvolutionalSS) である。

進化スムージング長を用いた場合も可変スムージング長と同様に数値計算を実行することができた。

可変スムージング長と比較して、接触不連続面右側の安定範囲が進化スムージング長では大きくなり、その中でも Scatter-Gather でより大きな向上が見られた。さらに不連続面での傾きがよりシャープになる、という向上も見られた。しかし、不連続面付近ではスパイクの大きさがより大きくなってしまい、悪化が確認された。

■ ρ_i と ρ_j の比較

これまででは、式 (2.23) の右辺 $\rho_{k'} = \rho_i, \rho_j$ をそれぞれ別で比較していたが、 ρ_i と ρ_j の違いによる数値計算結果についても比較する。なお、 ρ_i 、Scatter-Gather は可変スムージング長 Scatter 法に対する向上が確認されなかったため、本比較の対象から外した。

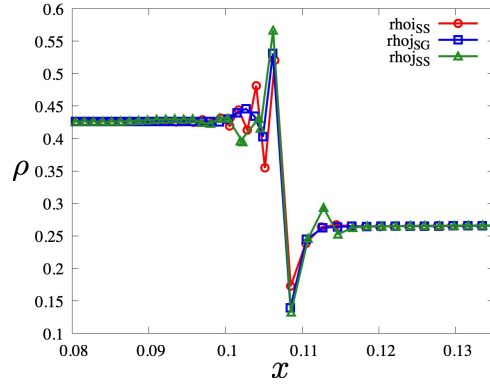


図 14: 初期条件を (5.9) としたときの数値計算結果。横軸は粒子の位置座標, 縦軸は密度を表している。また, 赤点が ρ_i の Scatter-Scatter(rhojss), 青点が ρ_j の Scatter-Gather(rhojsg), 緑点が ρ_j の Scatter-Scatter(rhojss) での数値計算結果を表している。

安定範囲の面では, 青点が ρ_j の Scatter-Gather が最も向上しており, 不連続面での傾きは上記 3 つで向上している。しかし, 不連続面付近のスパイクの大きさは進化スムージング長ではどれも大きくなり, 悪化している。

■ 初期条件の設定による違い

スムージング長の時間発展方程式を導入したことによって, スムージング長の初期条件を自由に決められるようになった。従って, 初期条件はこれまで設定していた初期条件ステップと初期の接触不連続面のすぐ左と右のスムージング長を滑らかにする初期条件スムーズを設定した。その具体的な設定を式 (5.16),(5.17), 概念図を図 15 に示す。

$$\text{初期条件ステップ: } \begin{cases} h_L = 5.0 \times 10^{-4} \\ h_R = 2.0 \times 10^{-2} \end{cases} \quad (5.16)$$

$$\text{初期条件スムーズ: } \begin{cases} h_L = 5.0 \times 10^{-4} \\ h_1 = 0.7h_L + 0.3h_R \\ h_2 = 0.3h_L + 0.7h_R \\ h_R = 2.0 \times 10^{-2} \end{cases} \quad (5.17)$$

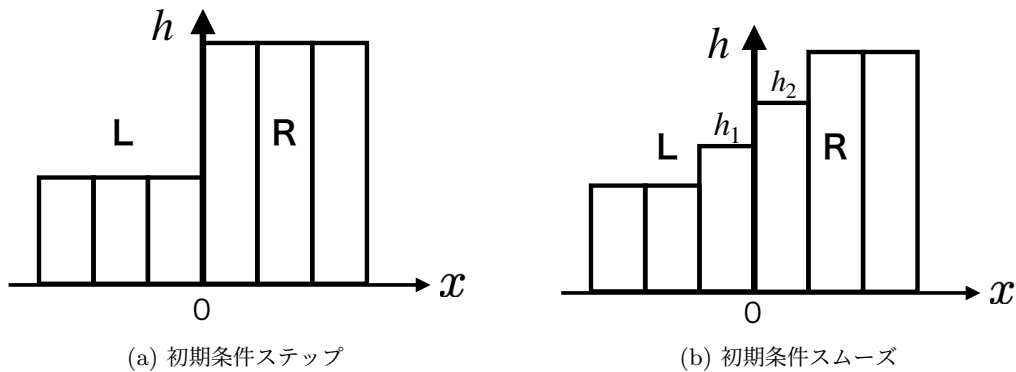


図 15: スムージング長初期条件設定方法の概念図。 $x = 0$ を初期の接触不連続面として表している。

上記の初期条件の設定による数値計算結果の比較を図 16 に示す。

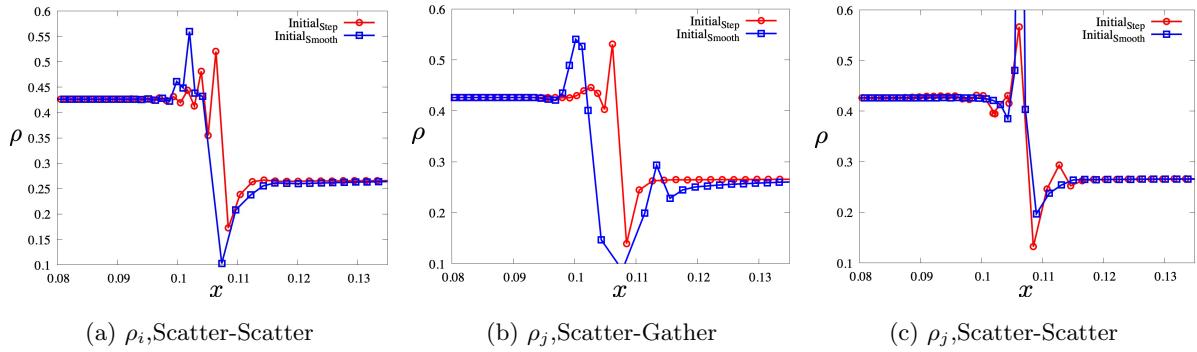


図 16: スムージング長以外の初期条件を (5.9) とし, スムージング長の初期条件を式 (5.16),(5.17) としたときの数値計算結果。(a) : ρ_i の Scatter-Scatter, (b) : ρ_j の Scatter-Gather, (c) : ρ_j の Scatter-Scatter での密度の様子を表している。横軸は粒子の位置座標, 縦軸は密度, 赤点は初期条件ステップの時の数値計算結果, 青点は初期条件スムーズの時の数値計算結果を表している。

以上より, スムージング長の初期条件はスムーズにすると, スパイクの大きさや安定範囲といった安定性の観点でかなり悪化する, という結果が得られた。

6 Summary

本研究では, 可変スムージング長を用いた SPH 法で衝撃波管問題を解いた際に, 現れる問題の解決を目標とした。その手法として, スムージング長の時間発展 (進化スムージング長) を導入し, 実験的に数値計算を実行した。結果として, 接触不連続面付近のスパイクが大きくなり, 悪化するという結果が得られた。

今後の展望として, 表式の再考や Godunov SPH 法 [2] への導入等考えるべき事項は多々あるが, そもそも新しい事柄を導入するのに, 初めに取り組む問題として衝撃波管問題は複雑すぎるため, 問題を単純化する事を考えている。具体的な施策を図 17 に示す。

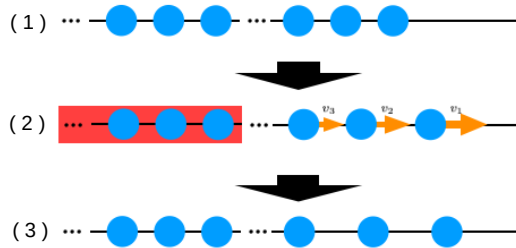


図 17: 初期条件までの SPH 粒子の移動の概念図。(1)SPH 粒子を等間隔 Δx で配置し, (2) 右半分粒子は固定したまま, 左半分粒子に速度を与える。(3) 左半分粒子の平均粒子間隔が $2\Delta x$ となったところで時間発展を終了し, その粒子配置における密度を SPH 法によって数値計算する。

謝辞

本論文を完成させるにあたり、Ta 研の皆様には大変お世話になりました。研究のアドバイスや何度も質問に答えていただいた犬塚修一郎教授、Symplectic 数値計算法について学習するために修士論文をご提供くださった理学研究所の富永遼佑さん、SPH 法の基礎から応用、コードの書き方やテスト計算の初期設定など大変多くを教えていただいた北島歆大さん等、本当に多くの場面でお世話になりました。この場を借りて深くお礼を申し上げたいと思います。そして、これからも相談や質問をさせていただくことになると思いますので、どうぞよろしくお願い致します。

参考文献

- [1] 富阪幸治 他 編, シリーズ現代の天文学 第 14 巻 シミュレーション天文学, 日本評論社, 2015 年発行
- [2] Inutsuka, S., Reformulation of Smoothed Particle Hydrodynamics with Riemann Solver, *J.Comput. Phys.*, 2002,179 238
- [3] Hirsch,C., “Numerical Computation of Internal and External Flows (Vol.2 : Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows) ” , *A Wiley Interscience Publication*, 1992.
- [4] 富永遼佑, 2018, 修士論文, ダスト-ガス混合系の不安定性による多重リング形成と微惑星形成の理論的研究
- [5] 田中佑希, 2011, 卒業論文, 巨大ガス惑星の平均運動共鳴と氷惑星の軌道進化

Appendix

付録 A CFL 条件

時間発展の間隔 Δt を決定するには、CFL 条件を考慮しなければならない。CFL 条件とは、数値計算において、情報が伝播する速さを実際の現象で波や物理量が伝播する速さよりも早くしなければならない、というものである。SPH 法における CFL 条件を考慮した Δt は以下の式で与えられる。

$$\Delta t = C_{CFL} \min \left(\frac{h_i}{C s_i} \right) \quad (\text{A.1})$$

ここで $C_{CFL} < 1$ がクーラン条件である。実際の計算では C_{CFL} は 0.5 程度が良い。ただし、オイラー法のような精度の低い時間発展法を用いる場合はもう少し小さな値を用いると良い。本研究では一貫して $C_{CFL} = 0.5$ を用いた。また、強い衝撃波面のような超音速で粒子が近づくような場合は、式をさらに

$$\Delta t = C_{CFL} \min \left(\frac{h_i}{C s_i + h_i |\nabla \cdot \mathbf{v}|} \right) \quad (\text{A.2})$$

とする必要がある。これは粒子同士の間が必要に近づきすぎたり、粒子同士のすり抜けを防止するためである。

付録 B 音波の計算の初期条件設定方法

音波の初期条件の設定方法には工夫が必要である。以下では音波の初期条件の設定方法について述べる。

■密度

$$\rho = \rho_0 + A \sin(kx_0 - \omega t)$$

と置きたい場合、質量保存則から

$$\rho dx = \rho_0 dx_0 \quad (\text{B.1})$$

であるから、位置に摂動を与える必要もある。そこで位置に摂動 δ を与え、 $x = x_0 + \delta$ として値を代入し、線形近似をすると

$$\begin{aligned} (\rho_0 + A \sin(kx_0 - \omega t))(dx_0 + d\delta) &= \rho_0 dx_0 \\ \implies \rho_0 d\delta &= \frac{A}{k} \cos(kx_0 - \omega t) \end{aligned}$$

となることから、位置に

$$x = x_0 + \frac{A}{\rho_0 k} \cos(kx_0 - \omega t) \quad (\text{B.2})$$

という摂動を与えた時、密度に

$$\rho = \rho_0 + A \sin(kx_0 - \omega t) \quad (\text{B.3})$$

という摂動が加わる。初期条件は、これに $t = 0$ を代入したものにすれば良い。

ここからは流体力学の基礎方程式を基に、速度、圧力および内部エネルギーの初期条件を考える。

■速度

$$\frac{dx}{dt} = v$$

であるから、非摂動項 $v_0 = 0$ とし、 $v = v_1$ とおくと (B.1) から

$$v_1 = \frac{\omega}{k} \frac{A}{\rho_0} \sin(kx_0 - \omega t) \quad (\text{B.4})$$

ここで、 ω/k は位相速度であり今の場合は音速が位相速度となる。すなわち

$$C_s \equiv \frac{\omega}{k}$$

とすると

$$v_1 = C_s \frac{A}{\rho_0} \sin(kx_0 - \omega t) \quad (\text{B.4}')$$

と表すこともできる。

■圧力

$p = p_0 + p_1$ として Navier-Stokes 方程式から導くことができる。Navier-Stokes 方程式は

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

だから線形化すると

$$\rho_0 \frac{dv_1}{dt} = -\frac{\partial p_1}{\partial x}$$

以上より，両辺積分して

$$p = p_0 + Cs^2 A \sin(kx_0 - \omega t) \quad (\text{B.5})$$

となる。

■内部エネルギー

$u = u_0 + u_1$ とすると，断熱の場合の理想気体の状態方程式は

$$p = (\gamma - 1)\rho u$$

であるから，線形化すると

$$p_0 + p_1 = p_0 + (\gamma - 1)\rho_0 u_1 + (\gamma - 1)\rho_1 u_0$$

となる。したがって，断熱理想気体の場合

$$u = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p_0}{\rho_0} + \frac{p_0}{\rho_0^2} A \sin(kx_0 - \omega t) \quad (\text{B.6})$$

ここで断熱理想気体の場合の音速が

$$Cs = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}}$$

であることを用いた。

付録 C 衝撃波管問題解析解

式 (3.26) と式 (3.27) で求めた p^*, v^* を含め，衝撃波管問題の解析解の表式は以下ようになる。なお，各領域の名前は図 1，図 2 に対応している。

領域 L : $x - x_0 < (v_L - Cs_L)t$

$$\begin{cases} \rho = \rho_L \\ p = p_L \\ v = v_L \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

領域 5 : $(v_L - Cs_L)t < x - x_0 < (\frac{\gamma+1}{2}v^* - Cs_L - \frac{\gamma-1}{2}v_L)t$

$$\begin{cases} \rho = \rho_L \left(\frac{p}{p_L} \right)^{1/\gamma} \\ p = p_L \left(\frac{Cs}{Cs_L} \right)^{2\gamma/(\gamma-1)} \\ v = \frac{2}{\gamma+1} \left(\frac{x-x_0}{t} + Cs_L + \frac{\gamma-1}{2}v_L \right) \\ Cs = Cs_L - \frac{\gamma-1}{2}(v - v_L) \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

領域 3 : $(\frac{\gamma+1}{2}v^* - C_{sL} - \frac{\gamma-1}{2}v_L)t < x - x_0 < v^*t$

$$\begin{cases} \rho = \rho_L \left(\frac{p}{p_L}\right)^{1/\gamma} \\ p = p^* \\ v = v^* \end{cases} \quad (C.3)$$

領域 2 : $v^*t < x - x_0 < Dt$

$$\begin{cases} \rho = \rho_R \frac{\gamma - 1 + (\gamma + 1)p^*}{\gamma + 1 + (\gamma - 1)p^*} \\ p = p^* \\ v = v^* \\ D = \text{衝撃波の速度} = v_R + \frac{(p/p_R - 1)C_{sR}^2}{\gamma(v_2 - v_R)} \end{cases} \quad (C.4)$$

領域 R : $Dt < x - x_0$

$$\begin{cases} \rho = \rho_R \\ p = p_R \\ v = v_R \end{cases} \quad (C.5)$$

付録 D 進化スムージング長 導入の経緯

スムージング長の時間微分式 (2.23) を導入した経緯について述べる。

スムージング長が一定の場合の密度の時間微分式

$$\frac{D\rho_i}{Dt} = \sum_j m_j (v_i - v_j) \frac{\partial}{\partial x_i} W(x_i - x_j, h) \quad (D.1)$$

と可変スムージング長の定義式 (2.21) の $\eta = 1$ としたもの

$$h_i = \frac{m_i}{\rho_i} \quad (D.2)$$

を利用する。式 (D.2) の両辺時間微分すると

$$\begin{aligned} \frac{Dh_i}{Dt} &= \frac{D}{Dt} \left(\frac{m_i}{\rho_i} \right) \\ &= -\frac{h_i}{\rho_i} \frac{D\rho_i}{Dt} \end{aligned} \quad (D.3)$$

式 (D.3) に式 (D.1) を代入すると

$$\frac{Dh_i}{Dt} = -\frac{h_i}{\rho_i} \sum_j m_j (v_i - v_j) \frac{\partial}{\partial x_i} W(x_i - x_j, h) \quad (D.4)$$

式 (D.4) の右辺 Kernel 関数内のスムージング長にラベルがついていないのは、左辺のスムージング長にラベルがついていることから不自然であるので、ラベルを選択できるものとする。

また、式 (D.3) の形で導出したが、本研究では右辺 ρ のラベルを変更することによって実験的に数値計算を実行した。右辺の Kernel 関数外 h のラベルの変更に関しては、左辺に移動した際に $\ln h_i$ の時間微分となり、式として綺麗になることから h_i として固定した。